SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA
Anno Accademico 1994-95

Bruno Franchi

APPROSSIMAZIONE CON FUNZIONI REGOLARI IN SPAZI DI SOBOLEV CON PESO E APPLICAZIONI

27 aprile 1995

Tecnoprint - Bologna 1995

Riassunto. In questo seminario presentiamo alcuni risultati di densità tipo Meyers-Serrin provati in collaborazione con R. Serapioni e Francesco Serra Cassano per gli spazi di Sobolev anisotropi associati a una famiglia di campi vettoriali Lipschitziani e a una funzione peso appartenente a una classe di Muckenhoupt A_p. Questo risultato è provato adattando l'argomento classico di Friedrichs. Inoltre, vengono considerati spazi BV anisotropi, e viene provato un analogo risultato di approssimazione, nello spirito di un precedente risultato di Anzellotti-Giaquinta. Per finire, come un primo passo verso una teoria geometrica della misura associata a una famiglia di campi vettoriali, viene provato che differenti definizioni di perimetro coincidono.

Abstract. In this seminar we sketch some density results of Meyers-Serrin type proved in collaboration with R. Serapioni and F. Serra Cassano for the anistropic Sobolev spaces associated with a family of Lipschitz continuous vector fields and a weight function belonging to Muckenhoupt's A_p classes. This result is proved by adapting the classical argument due to Friedrichs. In addition, anisotropic BV spaces are considered, and an analogous approximation result is proved, in the spirit of a previous result for usual BV spaces due to Anzellotti-Giaquinta. Finally, as a first step toward a geometric measure theory associated with a family of vector fields, different definitions of perimeter are proved to be equivalent.

In questo seminario intendo presentare alcuni risultati ottenuti in collaborazione con R. Serapioni e F. Serra Cassano ([FSSC1,2,3]) sulla densità delle funzioni regolari negli spazi di Sobolev associati a una famiglia di campi vettoriali (che estendono quindi il classico teorema di Meyers-Serrin per gli spazi di Sobolev), insieme ad alcune applicazioni di questi allo studio di funzionali non coercivi del calcolo delle variazioni. Questi risultati sono il primo passo del progetto più complesso dello sviluppo di una teoria geometrica della misura associata a una famiglia di campi vettoriali.

Sia $X = (X_1, \ldots, X_m)$ una famiglia di campi vettoriali definiti in un aperto Ω dello spazio euclideo $\mathbb{R}^n$. Questi campi vettoriali sono naturalmente identificati con gli operatori differenziali del primo ordine $X_j = \sum_{i=1}^n c_{j,i}(x)\frac{\partial}{\partial x_i}$, $j = 1, \ldots, m$ e noi assumiamo che $c_{j,i}$ siano funzioni Lipschitz in Ω. Se $p \geq 1$, possiamo allora associare alla nostra famiglia di campi vettoriali una classe naturale di spazi di Sobolev anisotropi definiti come segue: diremo che u appartiene a $\mathcal{W}_X^{1,p}(\Omega)$ se $u \in \mathcal{L}^p(\Omega)$ e $X_j u \in \mathcal{L}^p(\Omega)$ per $j = 1, \ldots, m$. Ad esempio, se $p = 2$, lo spazio $\mathcal{W}_X^{1,2}$ è lo spazio naturale delle soluzioni deboli degli operatori cosidetti 'somma di quadrati' $\sum_j X_j^2$; più in generale, le soluzioni deboli di equazioni del secondo ordine dipendenti da X come

$$\sum_{j=1}^m X_j(|X_j u|^{p-2} X_j u) = 0$$

se $p > 1$ sono naturalmente elementi di $\mathcal{W}_X^{1,p}(\Omega)$. In generale, se $f : \Omega \times \mathbb{R}^m \to [0, +\infty)$ è una funzione di Borel tale che $\eta \to f(x, \eta)$ è convessa in $\mathbb{R}^m$ per ogni $x \in \Omega$ ed esistono $0 < \lambda_0 \leq \Lambda_0$ tali che

$$\lambda_0 |\eta|^p \leq f(x, \eta) \leq \Lambda_0(1 + |\eta|^p),$$

allora i minimi di integrali variazionali del tipo

$$u \mapsto \int_\Omega f(x, X_1 u, \ldots, X_m u)\, dx + \int_\Omega |u - u_0|^p dx, \qquad p > 1$$

esistono naturalmente come elementi degli spazi di Sobolev anisotropi $\mathcal{W}_X^{1,p}(\Omega)$ dipendenti da $(X_1, \ldots, X_m)$, per ogni fissato $u_0 \in \mathcal{L}^p(\Omega)$. Osserviamo esplicitamente che non abbiamo nessuna ipotesi di coercività sui campi vettoriali X; in altri termini, non si assume nessun controllo di Xu sul gradiente usuale Du. Ne segue che questi funzionali non hanno una p-crescita negli spazi di Sobolev usuali. D'altra parte, anche condizioni globali di subellitticità come la condizione del rango di Hörmander ([H]) o sue generalizzazioni a campi non regolari ([FL]) non sono a priori assunte su X, anche se, ovviamente, queste classi di campi vettoriali forniranno esempi importanti di funzionali variazionali non coercivi che verificano le nostre ipotesi. Di fatto, per queste classi di funzionali varranno ulteriori risultati di regolarità, nello stesso modo in cui le soluzioni deboli delle corrispondenti equazioni di Eulero condividono molte proprietà degli operatori ellittici, come, ad esempio, il principio di massimo, la disuguaglianza di Harnack e l'hölderianità delle soluzioni deboli.

Esempi di funzionali di questo tipo sono dati da funzionali 'tipo Grushin' come

$$\int_\Omega \left(|D_x u|^2 + |x|^{2m}|D_y u|^2\right)^{p/2} dx\, dy \qquad \text{in } \mathbb{R}^{n_1}_x \times \mathbb{R}^{n_2}_y,$$

o 'tipo Heisenberg' come

$$\int_\Omega \left(|u_x + 2yu_t|^2 + |u_y - 2xu_t|^2\right)^{p/2} dx\, dy\, dt \qquad \text{in } \mathbb{R}^3.$$

Tuttavia, come sottolineavamo sopra, i nostri presenti risultati si applicano anche a integrali variazionali con direzioni completamente mancanti come

$$\int_\Omega |D_x u|^p dx \qquad \text{o} \qquad \int_\Omega \left(|D_x u|^2 + |y|^{2m}|D_y u|^2\right)^{p/2} dx\, dy \qquad \text{in } \mathbb{R}^{n_1}_x \times \mathbb{R}^{n_2}_y,$$

o altre situazioni fortemente degeneri come quelle descritte sotto.

Se $p = 1$, i corrispondenti funzionali con crescita lineare sono funzionali del tipo dell'area della forma

$$u \mapsto A(u) = \int_\Omega (1 + \sum_{j=1}^m |X_j^2 u|)^{1/2}\, dx.$$

Per studiare questa classe di funzionali si è naturalmente portati a introdurre spazi BV anisotropi. Una possibile definizione di questi spazi è la seguente: $u \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ appartiene a $BV_X(\Omega)$ se $X_j u$ è una misura di Radon in Ω per $j = 1, \ldots, m$. Notiamo esplicitamente che lo studio di questi funzionali del tipo dell'area non è solamente motivata dall'analogia formale con il caso ellittico e l'usuale funzionale dell'area, ma proviene naturalmente da una definizione intrinseca di misura di una varietà di codimensione uno (o perimetro) che studieremo.

Più in generale, la misura di Lebesgue $d\mu$ nei funzionali integrali qui sopra può essere sostituita da una misura $w\, d\mu$, dove $w \in \mathcal{L}^1_{loc}$ è una funzione non negativa (chiameremo una tale funzione una *funzione peso*), appartenente a opportune classi di Muckenhoupt A_p.

Per prima cosa definiremo gli spazi di Sobolev anisotropi $\mathcal{H}^{1,p}_X$ e $\mathcal{W}^{1,p}_X$ rispetto a una funzione peso appartenente ad A_p rispetto alle sfere euclidee, e proveremo che essi coincidono (teorema tipo Meyers e Serrin). In altre parole, proveremo la densità di funzioni regolari nello spazio di Sobolev anisotropo pesato. Il passo cruciale consiste in una approssimazione locale, poichè il passaggio dall'approssimazione locale al risultato globale sarà ottenuto ripetendo lo stesso schema della prova di Meyers e Serrin. Può essere sorprendente che la nostra prova segua l'approccio classico di Friedrichs [Fr] di regolarizzazione per convoluzione con gli ordinari mollificatori a simmetria radiale anche in presenza di campi vettoriali che possono essere identificati con operatori di traslazione non invarianti per traslazione. Infatti, questo approccio sembra contraddire una filosofia generale che afferma sostanzialmente che gli strumenti vanno adattati ad una opportuna geometria associata ai campi vettoriali. D'altra parte, notiamo ancora esplicitamente che, nel nostro caso, a causa della possibile forte degenerazione dei campi vettoriali, non c'è una geometria intrinseca

soggiaciante e neppure qualche struttura di gruppo che definisca una convoluzione naturale. Inoltre, anche nelle situazioni in cui tale geometria esiste, per le nostre ipotesi non c'è nessuna relazione tra il peso e la geometria stessa. Di fatto, questo è il risultato tecnico principale di questo seminario, che segue da un'accurata stima di un commutatore, dove sono usate proprietà di cancellazione di certi nuclei integrali insieme a risultati di analisi reale.

Successivamente si considerano gli spazi tipo BV.Per semplicità, in questo caso ci limiteremo a considerare il caso della misura di Lebesgue. Daremo tre diverse definizioni di funzione BV rispetto a campi vettoriali; tutt'e tre sono state precedentemente e separatamente introdotte nella letteratura, anche se in contesti differenti, come campi tipo Hörmander, metriche quasi Finsleriane e forme di Dirichlet (si vedano, ad es., [AB], [CDG], [FGW], [BiMo]). Ancora proveremo che funzioni BV possono essere approssimate in senso opportuno (in variazione: si veda [AG]) con funzioni regolari e, come corollario, seguirà che queste tre definizioni coincidono per campi vettoriali lipschitziani. A questo punto è possibile dare una definizione di X-perimetro per sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ e provare una formula di coarea per funzioni BV. Questa nozione è consistente con quelle di [CGD], [FGW1,2]. Tuttavia, sottolineiamo ancora che le nostre richieste sui campi vettoriali sono così deboli che sono certamente false disuguaglianze isoperimetriche del tipo di quelle dei lavori precedenti. Infatti, se X è identicamente zero, allora soddisfa ovviamente le nostre ipotesi, ma è facile anche produrre esempi di campi non banali e di aperti regolari con X-perimetro nullo. Consideriamo, ad esempio, i campi vettoriali $X = (X_1, X_2, X_3)$ dove

$$X_1 = y\partial_x - x\partial_y \quad , \quad X_2 = y\partial_z - z\partial_y \quad , \quad X_3 = x\partial_z - z\partial_x,$$

e la sfera unitaria $B(x,1)$ di $\mathbb{R}^3$. Allora su $\partial B(x,1)$ la normale ν è ortogonale a X_j, per $j = 1,2,3$. Poichè per domini regolari lo X-perimetro è dato dalla integrazione sul bordo della densità $(\sum_j \langle X_j, \nu\rangle^2)^{1/2}$ che si annulla identicamente su $\partial B(x,1)$, allora lo X-perimetro è nullo. Questo fenomeno è chiaramente connesso al teorema di Frobenius. Una profonda discussione su questo argomento è in [Su].

Per finire, questi risultati possono essere applicati per caratterizzare il rilassato di funzionali integrali del tipo descritto in precedenza. In questo modo si estendono risultati di Goffman, Serrin e Dal Maso per funzionali non degeneri ([GS] e [DM]). Inoltre, i risultati di approssimazione mostrano che, per questo tipo di funzionali, non si presenta il cosidetto fenomeno di Lavrentev, cioè il minimo negli spazi tipo Sobolev coincide con l'estremo inferiore del funzionale su funzioni regolari.

In questa nota $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ è un aperto fissato. Se $v, w \in \mathbb{R}^n$, denotiamo con $|v|$ e $\langle v, w\rangle$ la norma e il prodotto scalare euclidei, rispettivamente. Se $x \in \mathbb{R}^n$ e $E \subset \mathbb{R}^n$ allora $\mathrm{dist}(x,E) = \inf\{|x-y| : y \in E\}$. Se Ω e Ω' sono sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$, allora $\Omega' \Subset \Omega$ significa che Ω' è contenuto compattamente in Ω. Inoltre, $B(x,r)$ è la sfera euclidea aperta di raggio r con centro x. Se $A \subset \mathbb{R}^n$, allora χ_A è la funzione caratteristica di A, $|A|$ la sua misura di Lebesgue n-dimensionale e per $k \geq 0$, $\mathcal{H}^k(A)$ è la sua k-dimensionale misura di Hausdorff. Denoteremo con $C^k(\Omega;\mathbb{R}^m)$ delle funzioni a valori in $\mathbb{R}^m$ che sono k volte derivabili con continuità, con $\mathrm{Lip}(\Omega;\mathbb{R}^m)$ lo spazio delle funzioni lipschitziane a valore in $\mathbb{R}^m$, e poniamo $C_0^k(\Omega;\mathbb{R}^m) = C^k(\Omega;\mathbb{R}^m) \cap \mathcal{E}'(\Omega;\mathbb{R}^m)$ e $\mathrm{Lip}_0(\Omega;\mathbb{R}^m) = \mathrm{Lip}(\Omega;\mathbb{R}^m) \cap \mathcal{E}'(\Omega;\mathbb{R}^m)$.

Inoltre, per brevità, scriveremo $C^k(\Omega)$ e $C_0^k(\Omega)$ se $m = 1$.Per finire, $\mathcal{M}(\Omega;\mathbb{R}^m)$ è lo spazio delle misure di Radon a valori in $\mathbb{R}^m$.

Nel seguito denoteremo con $L^p(\Omega, w)$ lo spazio L^p rispetto alla misura $dw = w(x)dx$ e porremo $w(A) = \int_A w(x)dx$. Così, se $f \in L^1(A, w)$ (rispettivamente se $f \in L^1(A)$) denoteremo la sua w-media con

$$\fint_A f(x)\, w dx = \frac{1}{w(A)} \int_A f(x)\, w dx$$

e con

$$\fint_A f(x)dx = \frac{1}{|A|} \int_A f(x)dx$$

la media di f su A rispetto alla misura di Lebesgue.

Se w is è una funzione peso, diciamo che

$$w \in A_p = A_p(\mathbb{R}^n, \text{ metrica euclidea, misura di Lebesgue})$$

se per tutte le sfere euclidee $B = B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : |y - x| < r\}$

(i) $$\sup_B \fint_B w\, dx \, (\fint_B w^{-1/(p-1)} dx)^{p-1} \leq c \qquad \text{quando} \quad 1 < p < \infty$$

(ii) $$\fint_B w\, dx \leq c \quad \operatorname*{ess\,inf}_B w \qquad \text{quando } p = 1.$$

La più piccola costante per cui vale (i) o (ii) sarà detta costante A_p di w. Osserviamo che, se $w \in A_p$ allora $L^p(\Omega, w) \subseteq L^1_{\text{loc}}(\Omega)$.

Useremo mollificatori a simmetria sferica J_ϵ definiti da $J_\epsilon(x) := \epsilon^{-n} J(\epsilon^{-1}|x|)$, dove $J \in C_0^\infty([-1, 1])$, $J \geq 0$ e $\int_0^1 J(t)dt = |B(0, 1)|^{-1}$.

Assumiamo che $X_1, \ldots, X_m$ siano campi vettoriali lipschitziani in Ω, dove $X_j = (c_{j1}, \ldots, c_{jn})$, $j = 1, \ldots, m$. Poniamo

$$C(x) = [c_{ji}(x)]_{\substack{i=1,\ldots,n \\ j=1,\ldots,m}}.$$

Per ogni $u \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ definiamo Xu come un elemento di $\mathcal{D}'(\Omega;\mathbb{R}^m)$ nel modo seguente:

$$\begin{aligned} Xu(\psi) :&= -\int_\Omega u \sum_{i=1}^n \partial_{x_i}(\sum_{j=1}^m c_{j,i}\, \psi_j)\, dx \\ &= -\int_\Omega u \operatorname{div}(C^T\psi)\, dx \qquad \forall \psi = (\psi_1, \ldots, \psi_m) \in C_0^\infty(\Omega;\mathbb{R}^m). \end{aligned}$$

Se poniamo $X^T\psi := \operatorname{div}(C^T\psi)$ l'aspetto della definizione è ancor più famigliare:

$$Xu(\psi) := -\int_\Omega u X^T\psi\, dx \qquad \forall \psi \in C_0^\infty(\Omega;\mathbb{R}^m).$$

Definizione 1. Per $1 \leq p \leq \infty$ e $w \in A_p$, poniamo

$$\mathcal{W}_X^{1,p}(\Omega, w) := \{u \in \mathcal{L}^p(\Omega, w) \quad : \quad X_j u \in \mathcal{L}^p(\Omega, w) \quad \text{per } j = 1, \ldots, m\}$$

$$\mathcal{W}_{X;loc}^{1,p}(\Omega, w) := \left\{u : u|_{\Omega'} \in \mathcal{W}_X^{1,p}(\Omega', w) \text{ per ogni aperto } \Omega' \Subset \Omega\right\}$$

Proposizione 2. *$\mathcal{W}^{1,p}_X(\Omega)$ con la norma*

$$\|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}_X(\Omega,w)} := \|u\|_{\mathcal{L}^p(\Omega,w)} + \sum_{i=1}^{m} \|X_j u\|_{\mathcal{L}^p(\Omega,w)}$$

è uno spazio di Banach, riflessivo se $1 < p < \infty$.

Definizione 3. Per $1 \leq p$ poniamo

$$\mathcal{H}^{1,p}_X(\Omega, w) := \text{chiusura di } \mathcal{C}^1(\Omega) \cap \mathcal{W}^{1,p}_X(\Omega, w) \text{ in } \mathcal{W}^{1,p}_X(\Omega, w)$$

Come per gli spazi di Sobolev usuali, $\mathcal{H}^{1,p}_X(\Omega, w) \subset \mathcal{W}^{1,p}_X(\Omega, w)$.
Cominciamo ora con un lemma tecnico.

Lemma 4. *Per $0 < \epsilon < \epsilon_1$, sia $K_\epsilon : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una famiglia di funzioni misurabili supportate in $B(0, \epsilon)$ che soddisfano $|K_\epsilon(z)| \leq C\epsilon^{-n}$ e*

$$\int_{B(0,\epsilon)} K_\epsilon(z)\, dz = 0.$$

(i) Se $u \in \mathcal{L}^p(\Omega, w)$ per $1 \leq p < \infty$, allora

$$\lim_{\epsilon \to 0} \|K_\epsilon * u\|_{\mathcal{L}^p(\Omega,w)} = 0.$$

Qui e nel seguito, senza ledere la generalità, possiamo pensare u definita su tutto $\mathbb{R}^n$ ed uguale a 0 fuori di Ω.

(ii) Se $u \in \mathcal{L}^\infty(\Omega)$, allora $\lim_{\epsilon \to 0}(K_\epsilon * u) = 0$ in $w^* - \mathcal{L}^\infty(\Omega)$, uniformemente per $u \in \mathcal{L}^\infty(\Omega)$, cioè per ogni $h \in \mathcal{L}^1(\Omega)$

$$\lim_{\epsilon \to 0} \left(\sup \left\{ \int_\Omega h(x)\, (K_\epsilon * u)(x)\, dx \quad : \quad \|u\|_{\mathcal{L}^\infty(\Omega)} \leq 1 \right\} \right) = 0$$

Possiamo ora provare il teorema di approssimazione locale, da cui seguirà il risultato globale come in [MS].

Proposizione 5. *Sia $u \in \mathcal{W}^{1,p}_X(\Omega, w)$ per $1 \leq p < \infty$. Allora se $\Omega' \Subset \Omega$*

$$\lim_{\epsilon \to 0} \|u * J_\epsilon - u\|_{\mathcal{W}^{1,p}_X(\Omega',w)} = 0,$$

dove $J_\epsilon(x) = \epsilon^{-n} J(\epsilon^{-1}|x|)$ è un mollificatore supportato in $B(0, \epsilon)$.

Dimostrazione. Se $p > 1$, è facile vedere che

$$\lim_{\epsilon \to 0} \|f * J_\epsilon - f\|_{L^p(\Omega',w)} = 0$$

poichè $|f * J_\epsilon|(x) \leq Mf(x)$ e quindi si può concludere utilizzando il fatto che la funzione massimale di Hardy-Littlewood Mf è in $L^p(\Omega, w)$ se $w \in A_p$.

Se $p = 1$,per ogni $\eta > 0$ possiamo scegliere una funzione continua f_η, tale che $\|f - f_\eta\|_{L^1(\Omega,w)} < \eta$. Per definizione di peso A_1, $Mw \leq cw$, così che

$$\begin{aligned}
\|J_\epsilon * (f - f_\eta)\|_{L^1_w(\Omega')} &\leq \int_{\Omega'} \int_{\mathbb{R}^n} \epsilon^{-n}\, J(\epsilon^{-1}|x-y|)\, |f(y) - f_\eta(y)|\, dy\, w(x) dx \\
&= \int_{\Omega'} |f(y) - f_\eta(y)| \int_{\mathbb{R}^n} \epsilon^{-n}\, J(\epsilon^{-1}|x-y|)\, w(x) dx\, dy \\
&\leq \int_{\Omega'} |f(y) - f_\eta(y)|\, Mw(y)\, dy \\
&\leq c \int_{\Omega'} |f(y) - f_\eta(y)|\, w(y) dy \\
&= c\, \|f - f_\eta\|_{L^1(\Omega',w)}.
\end{aligned}$$

Fissiamo ora η in modo che sia $\|f - f_\eta\|_{L^1(\Omega,w)}$ sia $\|J_\epsilon * (f - f_\eta)\|_{L^1(\Omega,w)}$ siano piccoli. La nostra asserzione segue poichè

$$\|J_\epsilon * f_\eta - f_\eta\|_{L^1(\Omega,w)} \leq c\, h(\epsilon) \int_\Omega w(x)\, dx = C\, h(\epsilon),$$

dove $h(\epsilon) = \sup_{|x-y|<\epsilon} |\, f_\eta(x) - f_\eta(y)\,|$.

Dunque sarà sufficiente provare che

$$\lim_{\epsilon \to 0+} \|X_j\, (f * J_\epsilon) - X_j f\|_{L^p(\Omega',w)} = 0$$

per $j = 1, \ldots, m$. Sia $Y = (b_1, \ldots, b_n)$ uno di questi campi vettoriali. Poichè

$$\begin{aligned}
\|\, Y(f * J_\epsilon) - Yf\,\|_{L^p(\Omega',w)} &\leq \|\, Yf - (Yf) * J_\epsilon\|_{L^p(\Omega',w)} \\
&\quad + \|(Yf) * J_\epsilon - Y(f * J_\epsilon)\|_{L^p(\Omega',w)},
\end{aligned}$$

e $Yf \in L^p(\Omega', w)$ ci basta provare che l'ultimo termine tende a zero per $\epsilon \to 0+$. Così, se $\epsilon < \mathrm{dist}(\Omega', \partial\Omega)$, abbiamo:

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega'} |Y(f * f_\epsilon) - (Yf) * J_\epsilon\,|^p w(x) dx \\
&\leq \sum_{i=1}^n \int_{\Omega'} \left| \int_{B(x,\epsilon)} (b_i(x) - b_i(y))\, f(y) \partial_i J_\epsilon(x-y) + \partial_i b_i(y) f(y) J_\epsilon(x-y)\, dy \right|^p w(x) dx.
\end{aligned}$$

Ora, per il teorema di Rademacher per q.o. $y \in \Omega$

$$b_i(x) - b_i(y) = \sum_{h=1}^n \partial_h b_i(y)\, (x-y)_h + R_i(x,y),$$

dove per $i = 1, \dots, n$

$$\lim_{x \to y} \frac{R_i(x,y)}{|x-y|} = 0 \qquad \text{per a.e. } y \in \Omega \tag{1.1}$$

$$\frac{|R_i(x,y)|}{|x-y|} \le C \qquad \text{per ogni } x, y \in \Omega. \tag{1.2}$$

Alla fine otteniamo

$$\begin{aligned}
&\|Y(f * J_\epsilon) - (Yf) * J_\epsilon\|_{L^p(\Omega', w)} \\
&\le \sum_{h \ne i} \left(\int_{\Omega'} \left| \int_{B(x,\epsilon)} f(y) \partial_h b_i(y) \left[(x-y)_h \frac{\partial J_\epsilon(x-y)}{\partial x_i} \right] dy \right|^p w(x) dx \right)^{1/p} \\
&+ \sum_{i=1}^n \left(\int_{\Omega'} \left| \int_{B(x,\epsilon)} f(y) \partial_i b_i(y) \left[(x-y)_i \frac{\partial J_\epsilon(x-y)}{\partial x_i} + J_\epsilon(x-y) \right] dy \right|^p w(x) dx \right)^{1/p} \\
&+ \sum_{i=1}^n \left(\int_{\Omega'} \left| \int_{B(x,\epsilon)} f(y) R_i(x,y) \frac{\partial J_\epsilon(x-y)}{\partial x_i} dy \right|^p w(x) dx \right)^{1/p}.
\end{aligned}$$

Per il Lemma 2.4, ogni termine delle prime due righe ha limite zero per $\epsilon \to 0+$. Infatti sia $f \partial_h b_i$ sia $f \partial_i b_i$ appartengono a $L^p(\Omega, w)$ e i nuclei tra parentesi quadre soddisfano tutte le ipotesi del lemma, in quanto possono essere scritti come

$$-\frac{\partial}{\partial y_i} \left((y-x)_h J_\epsilon(x-y) \right) \qquad \text{per } i \ne h$$

e

$$\frac{\partial}{\partial y_i} \left((y-x)_i J_\epsilon(x-y) \right)$$

rispettivamente. Così, possiamo restringerci a considerare i termini contenenti $R_i(x,y)$. Ora, poichè

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\partial}{\partial x_i} J_\epsilon(x-y) \right| &= \left| \frac{1}{\epsilon^{n+1}} \frac{x_i - y_i}{|x-y|} J'(\epsilon^{-1}|x-y|) \right| \\
&\le \frac{1}{\epsilon^n} \frac{1}{|x-y|} \sup_{t \ge 0} |J'(t)| = C \frac{1}{\epsilon^n} \frac{1}{|x-y|},
\end{aligned}$$

ognuno di tali termini è limitato da

$$I_i = C \left(\int_{\Omega'} \left| \int_{B(x,\epsilon)} |f(y)| \frac{|R_i(x,y)|}{|x-y|} \frac{1}{\epsilon^n} dy \right|^p w(x) dx \right)^{1/p}.$$

se $p = 1$ questo integrale è uguale a

$$I_i = \int_\Omega |f(y)| \, \frac{1}{\epsilon^n} \left(\int_{B(y,\epsilon)} \frac{|R_i(x,y)|}{|x-y|} \, w(x) \, dx \right) dy.$$

e, per il teorema della convergenza dominata, tende a zero per $\epsilon \to 0$. Infatti

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\epsilon^n} \int_{B(y,\epsilon)} \frac{|R_i(x,y)|}{|x-y|} \, w(x) dx \\
&\leq \frac{1}{\epsilon^n} \int_{B(y,\epsilon)} \frac{|R_i(x,y)|}{|x-y|} \, |w(x) - w(y)| \, dx + w(y) \, \frac{1}{\epsilon^n} \int_{B(y,\epsilon)} \frac{|R_i(x,y)|}{|x-y|} \, dx \\
&\leq C \left\{ \frac{1}{\epsilon^n} \int_{B(y,\epsilon)} |w(x) - w(y)| \, dx + w(y) \int_{B(0,1)} \frac{|R_i(y+\epsilon\xi, y)|}{\epsilon|\xi|} \, d\xi \right\};
\end{aligned}$$

qui il primo termine dell'ultima linea tende a zero in ogni punto di Lebesgue y di w, mentre il secondo tende a zero per q.o. $y \in \Omega$ in forza di (1.1) e (1.2) e del teorema della convergenza dominata. Quindi

$$\lim_{\epsilon \to 0} |f(y)| \, \frac{1}{\epsilon^n} \int_{B(y,\epsilon)} \frac{|R_i(x,y)|}{|x-y|} \, w(x) dx = 0 \quad \text{as } \epsilon \to 0+, \text{for a.e. } y \in \Omega.$$

Inoltre, siccome $w \in A_1$,

$$|f(y)| \, \frac{1}{\epsilon^n} \int_{B(y,\epsilon)} \frac{|R_i(x,y)|}{|x-y|} \, w(x) dx \leq C \, |f(y)| \, Mw(y) \leq C \, |f(y)| \, w(y).$$

Questo conclude la prova nel caso $p = 1$.

Se $p > 1$, poniamo $f_m = \min\{|f|, m\}$. Allora

$$\begin{aligned}
&\left(\int_{\Omega'} \left| \int_{B(x,\epsilon)} |f(y)| \frac{|R_i(x,y)|}{|x-y|} \frac{1}{\epsilon^n} \, dy \right|^p w(x) dx \right)^{1/p} \\
&\leq \left(\int_{\Omega'} \left| \int_{B(x,\epsilon)} (|f(y)| - f_m(y)) \frac{|R_i(x,y)|}{|x-y|} \, \frac{1}{\epsilon^n} \, dy \right|^p w(x) dx \right)^{1/p} \\
&+ \left(\int_{\Omega'} \left| \int_{B(x,\epsilon)} f_m(y) \, \frac{|R_i(x,y)|}{|x-y|} \, \frac{1}{\epsilon^n} \, dy \right|^p w(x) dx \right)^{1/p} \\
&= I_1 + I_2.
\end{aligned}$$

Senza ledere la generalità, assumiamo che supp f, supp $f_m \subseteq \Omega$. Allora

$$\begin{aligned}
I_1 &\leq C \left(\int_{\Omega'} \left(\epsilon^{-n} \int_{B(x,\epsilon)} |f(y)| - f_m(y) \, dy \right)^p w(x) dx \right)^{1/p} \\
&\leq C \left(\int_{\Omega'} (M(|f| - f_m))^p \, w(x) dx \right)^{1/p} \\
&\leq C \left(\int_{\Omega} (|f| - f_m)^p \, w(x) \, dx \right)^{1/p}
\end{aligned}$$

poichè $w \in A_p$. Quindi per ogni $\theta > 0$ è possibile scegliere $m = m_\theta > 0$ tale che $I_1 < \theta$per ogni $\epsilon > 0$. Sia ora m fissato. Ponendo $y = x + \epsilon\eta$ abbiamo

$$I_2 = \left(\int_{\Omega'} \left(\int_{B(0,1)} f_m(x+\epsilon\eta) \, \frac{|R_i(x, x+\epsilon\eta)|}{\epsilon|\eta|} \, d\eta \right)^p w(x)dx \right)^{1/p}$$
$$\leq \int_{B(0,1)} \left(\int_{\Omega'} f_m^p(x+\epsilon\eta) \left(\frac{|R_i(x, x+\epsilon\eta)|}{\epsilon|\eta|} \right)^p w(x)dx \right)^{1/p} d\eta$$

per la disuguaglianza integrale di Minkowski. Quindi

$$I_2 \leq \int_{B(0,1)} \left(\int_{\Omega'} f_m^p(x+\epsilon\eta) \left(\frac{|R_i(x, x+\epsilon\eta)|}{\epsilon|\eta|} \right)^p |w(x) - w(x+\epsilon\eta)| dx \right)^{1/p} d\eta$$
$$+ \int_{B(0,1)} \left(\int_{\Omega'} f_m^p(x+\epsilon\eta) \left(\frac{|R_i(x, x+\epsilon\eta)|}{\epsilon|\eta|} \right)^p w(x+\epsilon\eta)dx \right)^{1/p} d\eta$$
$$= J_1 + J_2.$$

Ora

$$J_1 \leq Cm \int_{B(0,1)} \left(\int_{\Omega} |w(x) - w(x+\epsilon\eta)| \, dx \right)^{1/p} d\eta < \theta$$

se ϵ è sufficientemente piccolo.

D'altra parte, siccome $\epsilon \longrightarrow 0$ e per q.o. $\eta \in B(0,1)$

$$f_m^p(x+\epsilon\eta) \left(\frac{R_i(x, x+\epsilon\eta)}{\epsilon|\eta|} \right)^p w(x+\epsilon\eta) \longrightarrow 0$$

e

$$f_m^p(x+\epsilon\eta) \left| \frac{R(x, x+\epsilon\eta)}{\epsilon|\eta|} \right|^p w(x+\epsilon\eta) \leq C \, f_m^p(x+\epsilon\eta) \, w(x+\epsilon\eta),$$

che appartiene a L^1, così che, per il teorema della convergenza dominata, abbiamo che $J_2 \longrightarrow 0$ se $\epsilon \longrightarrow 0$. Dunque l'asserto è completamente provato.

Osservazione. Se $p > 1$, un teorema tipo Meyers-Serrin è ancora valido se il peso $w \in A_p$ rispetto alle sfere metriche (qualora queste esistano!), ma in questo caso la prova è completamente differente e richiede un argomento indiretto legato alla disuguaglianza di Poincaré e all'esistenza di opportuni ricoprimenti tipo Whitney in spazi di tipo omogeneo.

Ora, come si era detto precedentemente, il teorema seguente può essere provato con gli stessi argomenti del classico teorema di Meyers e Serrin.

Teorema 6. *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$ e $1 \leq p < \infty$; allora*

$$\mathcal{H}^{1,p}_X(\Omega) = \mathcal{W}^{1,p}_X(\Omega).$$

L'usuale spazio $\mathcal{BV}(\Omega)$ può essere definito equivalentemente in almeno tre modi. Se $u \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ diciamo che $u \in \mathcal{BV}(\Omega)$ se una delle proprietà seguenti è verificata.
(i) il gradiente distribuzionale Du è una misura di Radon a valori in $\mathbb{R}^n$,
(ii) $\int |Du| < +\infty$ dove la variazione totale $\int |Du|$ è definita come

$$\int |Du| := \sup \left\{ \int u(x) \operatorname{div} \psi(x) dx : \psi \in C^1_0(\Omega), |\psi(x)| \leq 1 \right\}$$

(iii) u appartiene al dominio di finitezza del $\mathcal{L}^1$-rilassato del funzionale $C^1(\Omega) \ni v \mapsto \int \langle Dv(x), Dv(x) \rangle^{1/2} dx$.

Queste tre definizioni suggeriscono tre, a priori differenti, modi di definire$\mathcal{BV}$ nel caso di campi vettoriali.

La prima consiste nel sostituire il gradiente D con l'operatore differenziale vettoriale X e dire che $u \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ appartiene a $\mathcal{BV}_X(\Omega)$ se Xu è una misura di Radon vettoriale. Questa definizione appare in [CDG] nel caso di campi vettoriali di Hörmander. Nella seconda e nella terza definizione, giocano un ruolo solo la matrice $[n \times n]$ $A(x) := C^T(x)C(x)$ e la forma quadratica $\mathbb{R}^n$: $\xi \mapsto \langle A(x)\xi, \xi \rangle$, ma non i campi vettoriali X per se stessi.

Per dare la seconda definizione, cambiamo la nozione di variazione totale di una funzione $u \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ cambiando in modo opportuno la nozione di campo vettoriale di norma minore di 1: diremo che un campo vettoriale $\psi : \Omega \to \mathbb{R}^n$ è A-subunitario se $\langle \psi(x), \xi \rangle \leq \langle A(x)\xi, \xi \rangle^{1/2}$, $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$ e $\forall x \in \Omega$. Quindi definiamo la A-variazione di $u \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ come l'estremo superiore $\int_\Omega u \operatorname{div} \psi \, dx$ per tutti i campi vettoriali lipschitziani a supporto compatto che sono A-subunitari.

Finalmente potremo vedere che entrambe queste definizione coincidono con il dominio di finitezza del rilassato il $\mathcal{L}^1$ del funzionale che sulle funzioni regolari è definito da

$$C^1(\Omega) \ni v \mapsto \int_\Omega \langle A(x)Dv(x), Dv(x) \rangle^{1/2} \, dx. \tag{2.0}$$

Questo approccio è il più naturale dal punto di vista del calcolo delle variazioni. Procedendo formalmente, poniamo ora

Definizione 7. Diremo che $u \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ ha X-variazione limitata in Ω se

$$\int_\Omega d|Xu| := \sup \left\{ \int_\Omega u X^T \psi \, dx : \psi \in C^\infty_0(\Omega; \mathbb{R}^m), |\psi(x)| \leq 1 \right\} < \infty$$

e indicheremo con $\mathcal{BV}_X(\Omega)$ lo spazio vettoriale di tali funzioni.

Osserviamo che, se $u \in \mathcal{W}^{1,1}_{X;loc}(\Omega)$, allora

$$\int_\Omega d|Xu| = \int_\Omega |Xu| \, dx.$$

Per ogni $u \in \mathcal{BV}_X(\Omega)$ il funzionale Xu può essere prolungato a $C_0^0(\Omega;\mathbb{R}^m)$. Continuiamo a chiamare Xu questo prolungamento. Per il teorema di rappresentazione di Riesz, esiste una misura di Radon positiva $|Xu|$ e una funzione $|Xu|$-misurabile $\sigma_u : \Omega \to \mathbb{R}^m$ con $|\sigma_u(x)| = 1$ per $|Xu|$-q.d. $x \in \Omega$, tali che:

$$Xu(\psi) = \int_\Omega \langle \sigma_u, \psi \rangle \, d|Xu|, \qquad \forall \psi \in C_0^0(\Omega;\mathbb{R}^m).$$

Ora, con le notazioni introdotte sopra, indichiamo con $\mathcal{SU}_0(\Omega)$ l'insieme dei campi vettoriali lipschiziani sub-unitari a supporto compatto, e poniamo

Definizione 8. Diremo che $u \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ ha A-variazione limitata in Ω se

$$\int_\Omega d|Du|_A := \sup \left\{ \int_\Omega u \operatorname{div} \sigma \, dx : \sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \in \mathcal{SU}_0(\Omega) \right\} < \infty.$$

e indicheremo con $\mathcal{BV}_A(\Omega)$ lo spazio vettoriale di tali funzioni.

Si ha allora

Proposizione 8. *Se $A(x) = C^T(x)C(x)$, allora*

$$\mathcal{BV}_X(\Omega) = \mathcal{BV}_A(\Omega) \qquad \text{e}$$
$$\int_\Omega d|Xu| = \int_\Omega d|Du|_A$$

Nello spazio delle funzioni a X-variazione media limitata possiamo allora ottenere un risultato di approssimazione analogo al risultato classico di Anzellotti-Giaquinta.

Teorema 9. *Sia $u \in \mathcal{BV}_X(\Omega)$. Allora esiste una successione $(u_h)_h \subset C^\infty(\Omega)$ tale che*

$$\lim_{h \to +\infty} \|u_h - u\|_{\mathcal{L}^1(\Omega)} = 0$$
$$\lim_{h \to +\infty} \int_\Omega d|Xu_h| = \int_\Omega d|Xu|.$$

Bibliografia

[A] R. A. Adams, *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York, 1975.

[AB] M. Amar, G. Bellettini, *A notion of total variation depending on a metric with discontinuous coefficients*, Ann. Inst. H. Poincaré, An. non linéaire **11** (1994), 91–133.

[A] G. Anzellotti, *The Euler equation for functional with linear grothw*, Trans. Amer. Math. Soc. **290** (1985), 483–501.

[AG] G. Anzellotti, M. Giaquinta, *Funzioni BV e tracce*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **60** (1978), 1–22.

[BiMo] Biroli, U. Mosco, *Sobolev and isoperimetric inequalities for Dirichlet forms on homogeneus space*, to appear.

[Bo] J.-M. Bony, *Principe de maximum, inégalité de Harnack et unicité du problème de Cauchy pour les opérateurs elliptiques dégénérés*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble **19** (1969), 277–304.

[B] G. Buttazzo, *Semicontinuity, relaxation and integral rapresentation in the calculus of variations*, Longman, Harlow, 1989.

[BM] G. Buttazzo, V.G. Mizel, *Interpretation of Lavrentiev phenomenon by relaxation*, J. Funct. Anal. **110** (1992), 409–424.

[CDG] L. Capogna, D. Danielli, N. Garofalo, *The geometric Sobolev embedding for vector fields and the isoperimetric inequality*, Comm. in Analysis and Geometry **2** (1994), 203–215.

[DM] G. Dal Maso, *Integral rapresentation on $BV(\Omega)$ of Γ-limits of variational integrals*, Manuscripta Math. **30** (1980), 387–416.

[D] S. Delladio, *Lower semicontinuity and continuity of function measures with respect to the strict convergence*, Proc. Royal Soc. of Edinburgh **119A** (1991), 265–278.

[EG] L. Evans, R. Gariepy, *Lecture Notes on Measure Theory and Fine Properties of Functions*, CRC Press, Boca Raton, 1992.

[FP] C. Fefferman, D.H. Phong, *Subelliptic eigenvalue problems*, Conference on Harmonic Analysis, Chicago, 1980, W. Beckner et al. ed., Wadsworth, 1981, pp. 590–606.

[FGW1] B. Franchi, S. Gallot, R.L. Wheeden, *Sobolev and isoperimetric inequalities for degenerate metrics*, Math. Ann., to appear.

[Fr] K.O. Friedrichs, *The identity of weak and strong estension of differential operators*, Trans. Amer. Math. Soc. **55** (1944), 132–151.

[FGW2] B. Franchi, S. Gallot, R.L. Wheeden, *Inégalités isopérimetriques pour des métriques dégénérées*, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. A **317** (1993).

[FL] B. Franchi, E. Lanconelli, *Hölder regularity theorem for a class of linear nonuniformly elliptic operators with measurable coefficients*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa **10** (4) (1983), 523–541.

[FLW] B. Franchi, G. Lu, R.L. Wheeden, *Representation formulas and weighted Poincaré inequalities for Hörmander vector fields*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble **45** (1995), to appear.

[FSSC1] B. Franchi, R. Serapioni, F. Serra Cassano, *Lavrentiev phenomenon and functionals which are coercitive with respect to vector fields*, C.R.Acad.Sci. Paris **320** (1995), 695–698.

[FSSC2] B. Franchi, R. Serapioni, F. Serra Cassano, *Meyers-Serrin type theorems and relaxation of variational integrals depending on vector fields*, preprint 1995.

[FSSC3] B. Franchi, R. Serapioni, F. Serra Cassano, *Approximation and imbedding theorems for weighted Sobolev spaces associated with Lipschitz continuous vector fields*, preprint 1995.

[G] E. Giusti, *Minimal Surfaces and Functions of Bounded Variation*, Birkhäuser, Boston, 1985.

[GS] C. Goffman, J. Serrin, *Sublinear functions of measures and variational integrals*, Duke Math. J. **31** (1964), 159–178.

[Gr] M. Gromov, *Carnot-Caratheodory spaces seen from within*, preprint of the IHES (1994).

[H] L. Hörmander, *Hypoelliptic second order differential equations*, Acta Math. **119** (1967), 147–171.

[L] M. Lavrentiev, *Sur quelques problèmes du calcul des variations*, Ann. Mat. Pura Appl. **4** (1926), 107–124.

[LM] S. Luckhaus, L. Modica, *The Gibbs Thompson relation within the gradient theory of phase transition*, Arch. Rat. Mech. Anal. **107** (1989), 71–83.

[MS] N.G. Meyers, J. Serrin, $H = W$, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **51** (1964), 1055–1056.

[R] Yu. G. Reschetnyak, *Weak convergence of completely additive vector functions on a set*, Sibirsk. Mat. Z. **9** (1968), 1386–1394, (translated).

[S] J. Serrin, *On the definition and properties of certain variational integrals*, Trans. Amer. Math. Soc. **101** (1961), 139–167.

[SV] D.W. Stroock, S.R.S. Varadhan, *Multidimensional Diffusion Processes*, Springer Verlag, Berlin, New York, 1979.

[Su] H. Sussmann, *Orbits of families of vector fields and integrability of distributions*, Trans. Amer. Math. Soc. **180** (1973), 171–188.